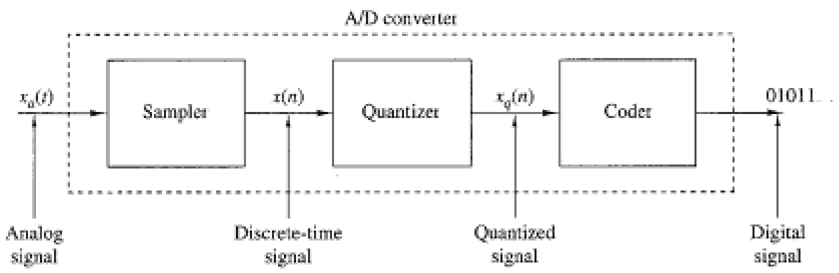
1.4 KONVERSI ANALOG-KE DIGITAL DAN DIGITAL-KE-ANALOG

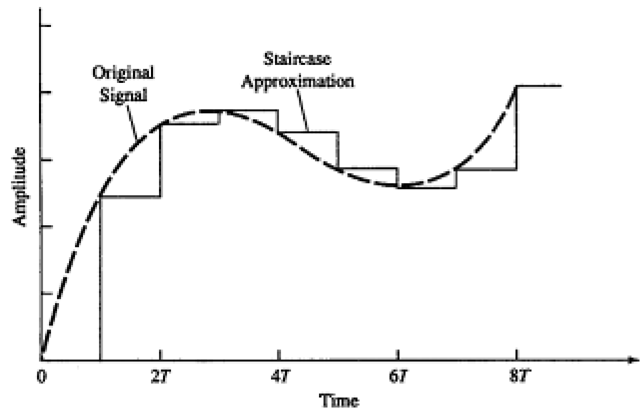
Sinyal-sinyal analog di alam:

1. Suara
2. Sinyal biologis
3. Sinyal seismik
4. Sinyal radar
5. Sinyal sonar
6. Sinyal audio dan video

Tiga langkah proses konversi A/D:

1. Pencuplikan.
   Adalah konversi sinyal waktu kontinu menjadi sinyal waktu diskret yang diperoleh dengan mengambil "cuplikan" sinyal waktu kontinu pada saat waktu diskret.
   $x_a(nT) \equiv x(n)$, dengan T adalah selang pencuplikan
2. Kuantisasi.
   Adalah konversi sinyal yang bernilai kontinu waktu diskret menjadi sinyal (digital) bernilai diskret, waktu diskret. Selisih antara cuplikan x(n) yang tidak terkuantisasi dan keluaran $x_q(n)$ yang terkuantisasi dinamakan Galat kuantisasi (Quantization error)
3. Pengkodean
   Dalam proses pengkodean, setiap nilai diskret $x_q(n)$ digambarkan dengan suatu barisan biner-b.





Perinsip konversi A/D, sinyal analog dapat disusun kembali dari cuplikan, yang memberikan bahwa laju pencuplikan cukup tinggi untuk menghindari masalah yang biasanya dinamakan pengaliasan (aliasing).

1.4.2 Pencuplikan Sinyal Analog

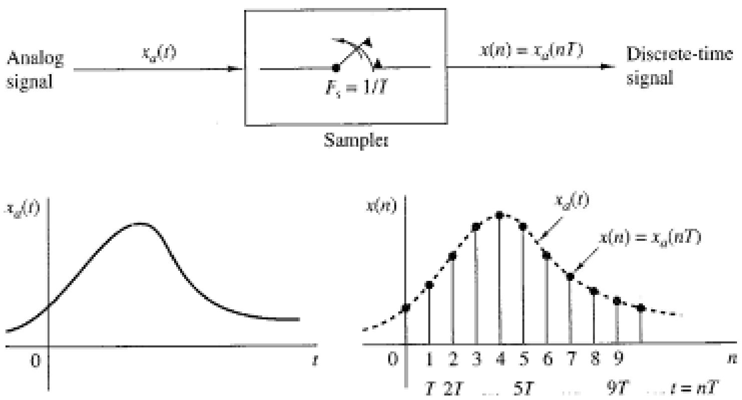
Pencuplikan periodik atau pencuplikan seragam, yang merupakan tipe pencuplikan yang sering digunakan dalam praktik.

$$x(n) = x_a(nT), \qquad -\infty < n < \infty$$

x(n) adalah sinyal waktu-diskret yang diperoleh dengan "mengambil cuplikan-cuplikan" sinyal analog $x_a(t)$ setiap detik.

T selang waktu antara cuplikan yang berurutan dinamakan periode pencuplikan atau selang cuplikan 1/T = Fs dinamakan laju pencuplikan (cuplikan per sekon) atau frekuensi pencupllikan (Hertz)

$$t = nT = \frac{n}{F_s}$$



F (atau Ω) untuk sinyal analog dan variabel frekuensi f (atau ω) untuk sinyal waktu-diskret. Untuk menetapkan hubungan ini, perlihatkan sinyal sinusoida analog yang berbentuk:

$$x_a(t) = A \cos(2\pi Ft + \theta)$$

bila dicuplik secara periodik pada laju Fs = 1/T cuplikan per sekon, menghasilkan

$$x_a(nT) \equiv x(n) = A\cos(2\pi FnT + \theta) = A\cos\left(\frac{2\pi nF}{F_s} + \theta\right)$$

Jika membandingkan variabel frekuensi F dan f berhubungan secara linear yaitu:

$$f = \frac{F}{F_s}$$

Atau ekuivalen

$$\omega = \Omega T$$

Hubungan tersebut membenarkan nama frekuensi relatif atau ternormalisasi.

Inerval variabel frekuensi F atau Ω untuk sinusoida waktu-kontinu adalah

$$-\infty < F < \infty$$

$$-\infty < \Omega < \infty$$

Namun, untuk situasi sinyal waktu-diskret adalah

$$-\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2}$$

$$-\pi < \omega < \pi$$

Dengan subtitusi ketiga persamaan terakhir, maka didaptkan bahwa frekuensi sinusoida waktu-kontinu bila dicuplik pada laju Fs =1/T, harus berada dalam interval,

$$-\frac{1}{2T} = -\frac{F_s}{2} \le F \le \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T}$$

Atau ekuivalen

$$-\frac{\pi}{T} = -\pi F_s \le \Omega \le \pi F_s = \frac{\pi}{T}$$

Hubungan ini diringkas dalam tabel 1 berikut:

TABLE 1.1 Relations Among Frequency Variables

Continuous-time signals		Discrete-time signals
$\Omega = 2\pi F$		$\omega = 2\pi f$
$\frac{\text{radians}}{\text{sec}}$ Hz		$\frac{\text{radians}}{\text{sample}}$ $\frac{\text{cycles}}{\text{sample}}$
	$\omega = \Omega T,\ f = F/F_s$ $\Rightarrow$	$-\pi \le \omega \le \pi$
	$\Leftarrow$ $\Omega = \omega/T,\ F = f \cdot F_s$	$-\frac{1}{2} \le f \le \frac{1}{2}$
$-\infty < \Omega < \infty$		$-\pi/T \le \Omega \le \pi/T$
$-\infty < F < \infty$		$-F_s/2 \le F \le F_s/2$

Pencuplikan periodik suatu sinyal waktu-kontinu menunjukkan pemetaan interval frekuensi tak berhingga untuk variabel f (atau ω). Karena frekuensi tertinggi dalam sinyal waktu-diskret adalah ω=π atau f = ½, dengan laju pencuplikan Fs, nilai-nilai F dan Ω tertinggi yang sesuai adalah

$$F_{\max} = \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T}$$

$$\Omega_{\max} = \pi F_s = \frac{\pi}{T}$$

Contoh

Pemakaian hubungan frekuensi ini dapat dinilai dengan memperhtikan dua sinyal sinusoida analog

$$x_1(t) = \cos 2\pi(10)t$$

$$x_2(t) = \cos 2\pi(50)t$$

Yang dicuplik dengan laju Fs = 40 Hz. Sinyal waktu-diskret atau barisan yang sesuai adalah

$$x_1(n) = \cos 2\pi\left(\frac{10}{40}\right)n = \cos\frac{\pi}{2}n$$

$$x_2(n) = \cos 2\pi\left(\frac{50}{40}\right)n = \cos\frac{5\pi}{2}n$$

Namun, $\cos 5\pi n/2 = \cos(2\pi n + \pi n/2) = \cos \pi n/2$. Maka $x_2(n) = x_1(n)$.

Penting untuk memperhatikan bahwa F_2 bukan hanya alias dari F_1 tetapi pada laju pencuplikan 40 cupilkan per sekon, F_3 = 90 Hz juga merupakan alias dari F_1, F_4 = 130 Hz dst.

Seluruh sinusoida $\cos 2\pi(F_1 + 40k)t$, k = 1,2,3,4,.... yang dicuplik 40 cuplikan per sekon menghasilkan nilai-nilai identik.

Umumnya pencuplikan sinyal sinusoida waktu-diskret

$$x_a(t) = A\cos(2\pi F_0 t + \theta)$$

Dengan laju pencuplikan Fs = 1/T menghasilkan sinyal waktu-diskret

$$x(n) = A\cos(2\pi f_0 n + \theta)$$

Dengan $f_0 = F_0/Fs$ adalah realtif sinusoida. Jika mengasumsikan bahwa $-Fs/2 \le F_0 \le Fs/2$, frekuensi f_0 dari x(n) adalah interval $-1/2 \le f_0 \le 1/2$, yang merupakan interval frekuensi untuk sinyal waktu diskret. Dalam kasus ini, hubungan antara f_0 dan F_0 adalah satu ke satu, dan karena itu hal tersebut mungkin mengidentifikasi (atau rekonstruksi) sinyal analog $x_a(t)$ dan cuplikan x(n).

Sebaliknya, sinusoida

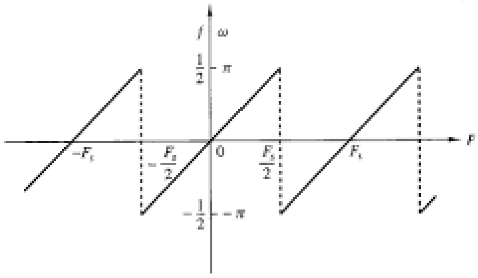
$$x_a(t) = A\cos(2\pi F_k t + \theta)$$

$$F_k = F_0 + kF_s, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

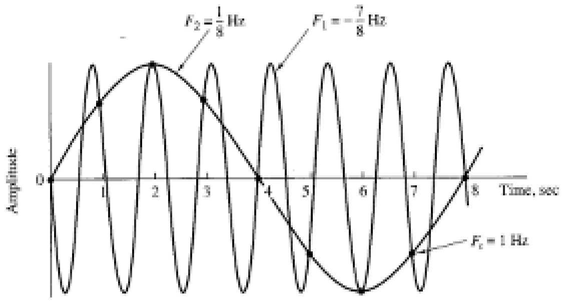
Dicuplik dengan laju Fs. Konsekuensinya sinyal yang dicuplik adalah

$$\begin{aligned} x(n) \equiv x_a(nT) &= A\cos\left(2\pi\frac{F_0 + kF_s}{F_s}n + \theta\right) \\ &= A\cos(2\pi n F_0/F_s + \theta + 2\pi k n) \\ &= A\cos(2\pi f_0 n + \theta) \end{aligned}$$

Yang identik dengan x(n) sebelumnya.



Suatu contoh pengaliasan dengan dua sinusoid yang mempunyai frekuensi F_0 = 1/8 Hz dan F_1 = -7/8 Hz menghasilkan cuplikan-cuplikan yang identik bila laju pencuplikan Fs = 1Hz digunakan. Buktikan....!



Jadi jumlah sinusoida waktu-kontinu tak berhingga disajikan dengan pencuplikan sinyal waktu-diskret yang sama (yaitu himpunan cuplikan yang sama).

<u>Latihan:</u>

1. Perhatikan sinyal analog

   $x_a(t) = 3 \cos 100\pi t$

   (a) Tentukan laju pencuplikan minimum yang dibutuhkan untuk menghondari pengaliasan

   (b) Andaikan bahwa sinyal cuplik dengan laju 200 Hz. Berapa sinyal waktu-diskret yang diperoleh sesudah pencuplikan?

   (c) Andaikan bahwa sinyal dicuplik pada laju 75 Hz. Berapa sinyal waktu-diskret yang diperoleh sesudah pencuplikan?

   (d) Berapa frekuensi 0<F<Fs/2 dari suatu sinusoida yang menghasilkan cuplikan-cuplikan identik dengan yang diperoleh dalam bagian (c)?

2. Perhatikan sinyal analog

   $x_a(t) = 3 \cos 50\pi t + 10 \sin 300\pi t - \cos 100\pi t$

   Berapa laju Nyquist untuk sinyal ini?

3. Perhatikan sinyal analog

   $x_a(t) = 3 \cos 2000\pi t + 5 \sin 6000\pi t + 10 \cos 12000\pi t$

   (a) Berapa laju Nyquist untuk sinyal ini?

   (b) Sekarang asumsikan bahwa kita mencuplik sinyal ini menggunaan laju pencuplikan Fs = 5000 cuplikan/sekon. Berapa sinyal waktu-diskret yang diperoleh sesudah pencuplikan?

(c) Berapa sinyal analog $y_a(t)$ yang dapat kita susun ulang dari pencuplikan menggunakan interpolasi ideal?

1.4.3 Kuantisasi Sinyal Amplitudo-Kontinu

Proses pengkonversian suatu sinyal amplitudo-kontinu waktu-diskret menjadi sinyal digital dengan menyatakan setiap nilai cuplikan sebagai suatu angka digit dinamakan kuantisasi. Kesalahan (*error*) diperkenalkan pada penampilan sinyal bernilai-kontinu dengan himpunan tingkatan nilai diskret berhingga dinamakan kesalahan kuantisasi atau kebisingan kuantisasi.

$$X_q(n) = Q[(x(n)]$$

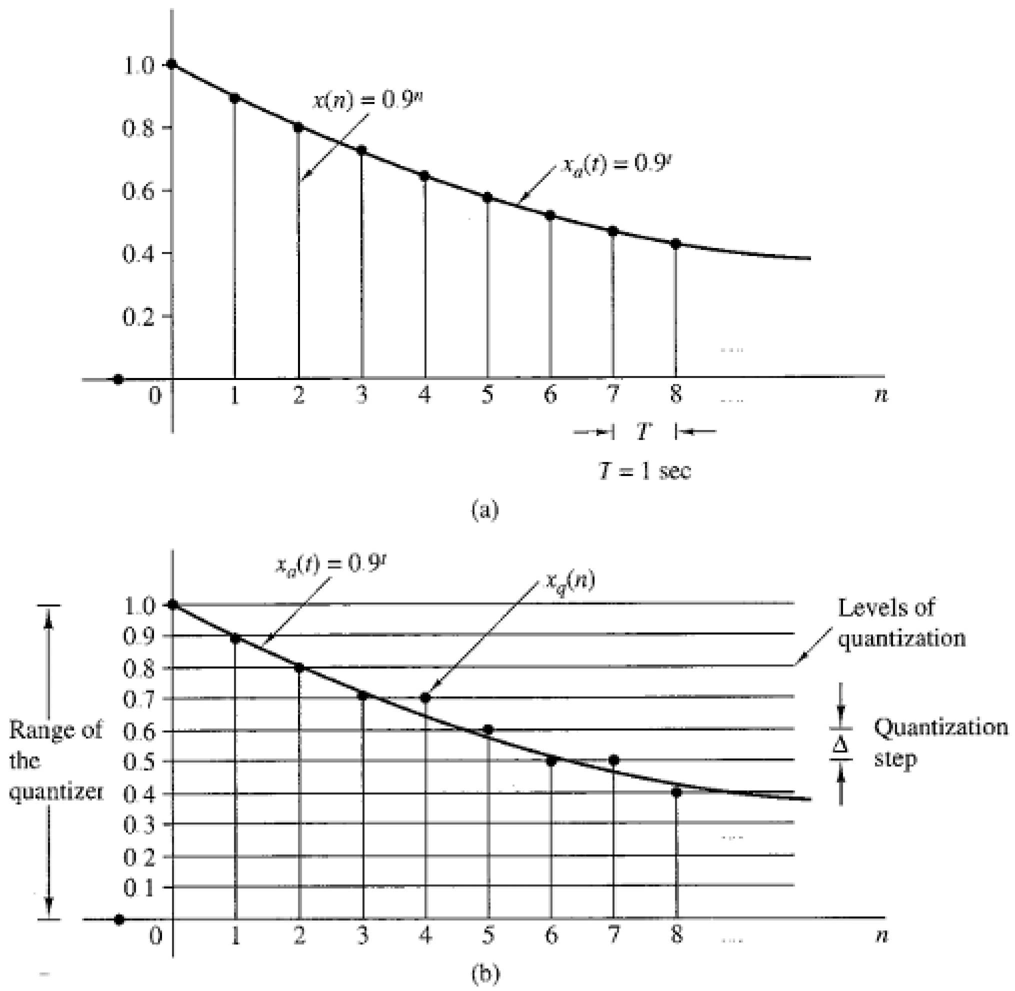


Figure 1.4.7 Illustration of quantization.

Maka kesalahan kuantisasi adalah

$$e_q(n) = x_q(n) - x(n)$$

ilustrasi numerik kuantisasi dengan satu digit signifikan menggunakan pembulatan ke atas dan pembulatan ke bawah

n	$x(n)$ Discrete-time signal	$x_q(n)$ (Truncation)	$x_q(n)$ (Rounding)	$e_q(n) = x_q(n) - x(n)$ (Rounding)
0	1	1.0	1.0	0.0
1	0.9	0.9	0.9	0.0
2	0.81	0.8	0.8	−0.01
3	0.729	0.7	0.7	−0.029
4	0.6561	0.6	0.7	0.0439
5	0.59049	0.5	0.6	0.00951
6	0.531441	0.5	0.5	−0.031441
7	0.4782969	0.4	0.5	0.0217031
8	0.43046721	0.4	0.4	−0.03046721
9	0.387420489	0.3	0.4	0.012579511

$$x(n) = \begin{cases} 0{,}9^n, n \geq \\ 0, \quad n<0 \end{cases}$$

Nilai-nilai yang mungkin pada sinyal digital dinamaka tingkat kuantisasi dengan menganggap bahwa jarak Δ antara dua tingkatan kuantisasi yang berurutan dinamakan ukuran langkah kuantisasi atau resolusi.

Kesalahan kuantisasi $e_q(n)$ pada pembulatan dibatasi pada interval $-\Delta/2 \leq e_q(n) \leq \Delta/2$

Dengan kata lain kesalahan kuantisasi sesaat tidak melebihi setengah langkah kuantisasi (seperti pada tabel.

Jika x_{min} dan x_{maks} menyatakan nilai x(n) minimum dan maksimum dan L adalah jumlah tingkatan kuantisasi, maka

$$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{L - 1}$$

1.4.4 Kuantisasi Sinyal Sinusoida

Gambar di bawah ini menyajikan pencuplikan dan kuantisasi sinyal sinusoida analog $x_a(t)$ = A cos $\Omega_0 t$

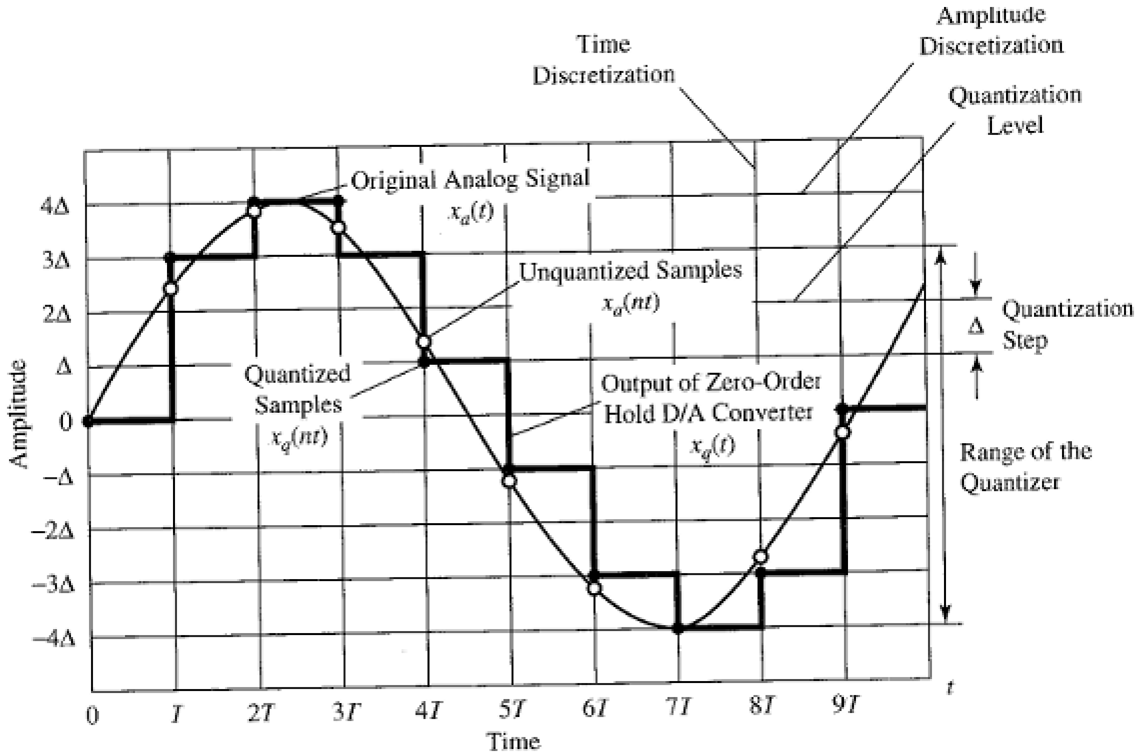


Figure 1.4.8 Sampling and quantization of a sinusoidal signal.

NB: garis horisontal menunjukkan waktu pencuplikan, garis vertikal menunjukkan waktu pencuplikan

Jadi dari sinyal analog $x_a(t)$ memperoleh sinyal waktu-diskret $x(n) = x_a(nT)$.

Jika laju pencuplikan Fs memenuhi teorema pencuplikan, kuantisasi merupakan kesalahan saja dalam proses konversi A/D. Jadi kita dapat mengkonversi kesalahan kuantisasi dengan mengkuantisasi sinyal analog $x_a(t)$ sebagai ganti sinyal waktu-diskret $x(n) = x_a(nT)$. Pemerikasaan gambar di bawah ini menunjukkan bahwa sinyal $x_a(t)$ hampir linear antara tingkatan-tingkatan kuantisasi.

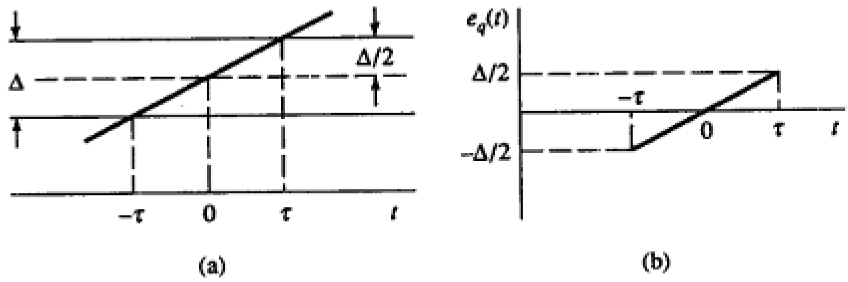


Figure 1.4.9 The quantization error $e_q(t) = x_a(t) - x_q(t)$.

τ menujukkan waktu $x_a(t)$ berada dalam tingkatan kuantisasi. Daya kesalahan rata-rata P_q adalah

$$P_q = \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} e_q^2(t)\,dt = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} e_q^2(t)\,dt$$

Karena $e_q(t) = (\Delta/2\tau)t,\ -\tau \le t \le \tau$, maka

$$P_q = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\left(\frac{\Delta}{2\tau}\right)^2 t^2\,dt = \frac{\Delta^2}{12}$$

Jika pengkuantisasi mempunyai b bit dengan keakuratan dan pengkuantisasi meliputi interval keseluruhan 2A,langkah kuantisasinya adalah $\Delta = 2A/a^b$, karena itu

$$P_q = \frac{A^2/3}{2^{2b}}$$

Daya rata-rata sinyal $x_a(t)$ adalah

$$P_x = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p}(A\cos\Omega_0 t)^2\,dt = \frac{A^2}{2}$$

Kualitas keluaran pengkonversi A/D biasanya diukur dengan rasio sinyal-ke-kebisingan (noise) kuantisasi (SQNR), yang memberikan rasio daya sinyal terhadap daya kebisingan:

$$\mathrm{SQNR} = \frac{P_x}{P_q} = \frac{3}{2}\cdot 2^{2b}$$

Dinyatakan dalam desibel (dB), SQNR adalah

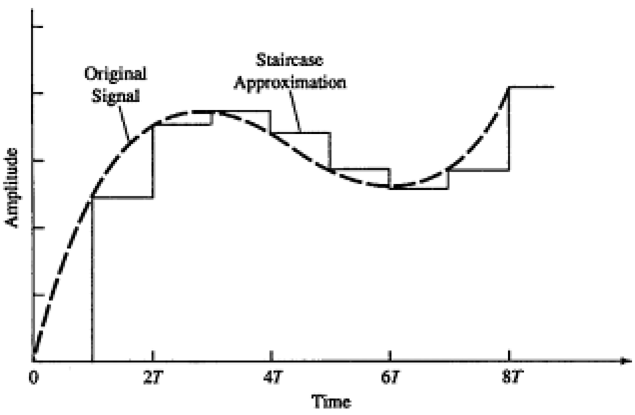
$$\mathrm{SQNR(dB)} = 10\log_{10}\mathrm{SQNR} = 1.76 + 6.02b$$

1.4.5 Pengkodean Cuplikan Terkuantisasi

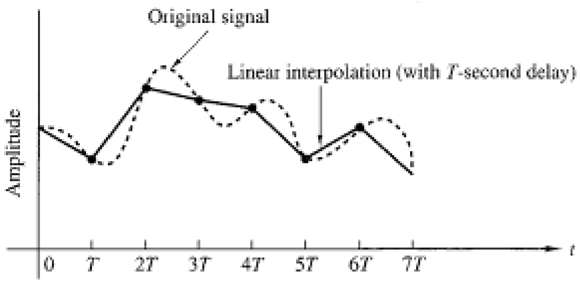
Jika **ada L tingkatan** perlu sekurang-kurangnya L angka biner yang berbeda. Dengan **panjang kata b bit** maka dapat menciptakan **2^b angka biner yang berbeda**. Karena $2^b \geq L$, atau sama dengan, $b \geq \log_2 L$. Jadi jumlah bit yang diperlukan dalam pengkodean adalah integer terkeecil yang lebih besar dari atu sama dengan $\log_2 L$. Pengkonversi yang tersedia secara konversial dapat diperoleh dengan presisi tertentu dari b = 16 atau kurang. Umumnya, jika laju pencuplikan yang lebih tinggi dan kuantisasi yang lebih baik, akan menyebabkan devais lebih mahal.

1.4.6 Konversi Digital ke Analog

Dari pandangan praktis, pengkonversi D/A yang paling sederhana (gambar di bawah ini) menahan nilai konstan cuplikan sampai cuplikan berikutnya diterima.



Pengembangan tambahan lain daat diperoeh menggunakan interpolasi linear seperti pada gambar di bawah ini yang menghubungkan cuplikan berurutan dengan potongan garis lurus. Interpolasi yang lebih baik dapat dicapai menggunakan teknik interpolasi orde-tinggi yang lebih canggih.



Gambar konektor titik linear
(dengan tunda T detik)

Latihan:

1. Tentukan dari sinusoida berikut yang periodik dan hitung periode fundamentalnya:
   (a) Cos $0.01\pi n$ (c) sin 3n
   (b) Cos $3\pi n$ (d) sin (π(62n/10))
2. Tentukan apakah setiap sinyal berikut periodik. Untuk kasus sinyal periodik, tetapkan periode fundamentalnya.
   (a) $x_a(t) = 3\cos(5t + \pi/6)$
   (b) $x(n) = 3\cos(5n + \pi/6)$
   (c) $x(n) = 2\exp[j(n/6 - \pi)]$
   (d) $x(n) = \cos(n/8)\cos(\pi n/8)$
   (e) $x(n) = \cos(\pi n/2) - \sin(\pi n/8) + 3\cos(\pi n/4 + \pi/3)$
3. Sinyal waktu-diskret x(n) = 6,35 cos(π/10)n dikuantisasi dengan resolusi (a) Δ =0,1 atau (b) 0,02. Berapa bit yang dibutuhkan dalam pengkonversian A/D pada masing-masing kasus?
4. Tentukan laju bit dan resolusi dalam pencuplikan suatu sinyal seismik dengan interval dinamis 1 volt jika laju pencuplikan Fs = 20 cuplikan /s dan kita menggunakan pengkonversi A/D 8-bit? Berapa frekuensi maksimum yang dapat hadir untuk menghasilkan sinyal seismik digital?